INTERROGATION N°3 — CORRIGÉ (SUJET A)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit $f : E \to F$ une application. Donner la définition (ou une caractérisation) de l'image directe de A par f, notée $f(A)$. On précisera dans quel ensemble est inclus A, et dans quel ensemble est inclus $f(A)$.

Avec $A \subset E$, on a $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F$

2) Soit $f : E \to F$ une application. Donner la définition de « f est une injection » avec des quantificateurs.

$\forall x, x' \in E \qquad f(x) = f(x') \implies x = x'$. (Mettre une équivalence est un pêché véniel...)

3) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'ordre ? On nommera explicitement chaque condition.

Soit $x, y, z \in E$. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si :

- Elle est réflexive, i.e. $x\mathcal{R}x$.
- Elle est symétrique, i.e. $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$ (idem, une implication suffit)
- Elle est transitive, i.e. $(x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = \lfloor 2n \rfloor$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

- On remarque que $f(0) = 0 = f\left(\frac{1}{4}\right)$ alors que $0 \neq \frac{1}{4}$. Donc f n'est pas injective.
- Soit $y \in \mathbb{Z}$. On pose $x = \frac{y}{2} \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = \lfloor y \rfloor = y$ car $y \in \mathbb{Z}$. Ainsi, f est surjective.
- Enfin, f n'est pas bijective car elle n'est pas injective.

INTERROGATION N°3 — CORRIGÉ (SUJET B)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit $f : E \to F$ une application. Donner la définition (ou une caractérisation) de l'image réciproque de B par f, notée $f^{-1}(B)$. On précisera dans quel ensemble est inclus B, et dans quel ensemble est inclus $f^{-1}(B)$.

Avec $B \subset F$, on a $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E$

2) Soit $f : E \to F$ une application. Donner la définition de « f est une surjection » avec des quantificateurs.

$\forall y \in F \quad \exists x \in E \qquad f(x) = y.$

3) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'équivalence ? On nommera explicitement chaque condition.

Soit $x, y, z \in E$. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si :

- Elle est réflexive, i.e. $x\mathcal{R}x$.
- Elle est antisymétrique, i.e. $(x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}x) \implies x = y$ (mettre une équivalence est une « petite faute »)
- Elle est transitive, i.e. $(x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

4) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = (-1)^n n$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

- Montrons que f est injective. Soit $n, n' \in \mathbb{N}$. On a

  $$\begin{aligned} f(n) = f(n') &\implies (-1)^n n = (-1)^{n'} n' \\ &\implies (-1)^{n-n'} n = n' \\ &\implies |n| = |n'| \\ &\implies n = n' \qquad \text{car } n, n' \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

  Donc f est injective.

  NB : si on avait utilisé des équivalences dans la définition de l'injectivité, il aurait fallu remplacer chaque implication ci-dessus par une équivalence. Mais alors, le raisonnemment serait invalide car la troisième implication n'est pas une équivalence (on passe à la valeur absolue). C'est pourquoi, il vaut mieux toujours écrire « $\implies$ » plutôt que « $\iff$ » lorsque cela est possible.

- On va montrer que f n'est pas surjective. Pour cela, on va montrer que l'équation $f(n) = 1$ n'a pas de solution n dans $\mathbb{N}$ (alors que $1 \in \mathbb{Z}$). Supposons par l'absure qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

  $$f(n) = (-1)^n n = 1$$

  En passant à la valeur absolue, on en déduit que $|(-1)^n n| = 1$, donc que $n = 1$. Mais cela entrainerait que $(-1)^1 \times 1 = 1$, donc $-1 = 1$. Contradiction. Ainsi, f n'est pas surjective.
- f n'étant pas surjective, elle n'est pas non plus bijective.